ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη από σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α2. Ορισμός από σχολικό βιβλίο σελίδα 155

Α3.Ορισμός από σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. f(x)=$\frac{g(x)}{h(x)}$

Πρέπει $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

f(x)=$\frac{g(x)}{h(x)}$=$\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$=$\frac{\frac{(\sqrt{x})^2+1}{\sqrt{x}}}{\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}}$=$\frac{x+1}{x-1}$, x>1

r(x)=g(x)·h(x)= $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=(\sqrt{x})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x-\frac{1}{x},\ x\geq 1$

Β2. $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'= -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για x>1, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται

$f(\Delta)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$ από (1) και (2)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ (1)

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1).\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ (2)

Για να βρούμε την f^{-1} λύνω την εξίσωση

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}=y \Leftrightarrow x\,(y-1) = y+1$, όπου $y-1>0 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$ Άρα

$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$ στο $(1,+\infty)$

Άρα f^{-1}(x)= f(x) και A_f=$A_{f^{-1}}$. Επομένως f^{-1}=f

B3. H r είναι συνεχής στο [1,+∞), επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim_{x\to+\infty} r(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$, άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

λ=$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{x}\right)=1$

β=$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{x}-x)=0$

Οπότε η r έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία (ε):y=x

B4. $(f^{-1}(f(x)))^2$ =1+4r(x) ⇔x^2=1+4(x-$\frac{1}{x}$) ⇔x^3=x+4x^2-4 ⇔

x^3-x-4x^2+4=0 ⇔x^2(x-4) – (x-4) = (x-4) (x^2-1)=0 ⇔

(x-4) (x-1) (x+1) = 0 ⇔ x=4 ή x=-1 ή x=1, Δεκτή η x=4 αφού χ>1

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{\chi\to2^-} f(x)=\lim_{\chi\to2^-}(-2x+4+e^{\lambda})=e^{\lambda}$

$\lim_{\chi\to2^+} f(x)=\lim_{\chi\to2^+}(-x^2$+4x-3+λ)=1+λ

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0=2 πρέπει e^{λ} =1+λ⇔ λ=0 ,αφού e^{λ}>λ+1για λ≠0

Γ2. f(x)=$\begin{cases}-2x+5\ ,\ 0\le x<2\\ -x^2+4x-3,\ x\ge 2\end{cases}$ με f'(x)=$\begin{cases}-2, & 0\le x<2\\ -2x+4, & x>2\end{cases}$

f'(x)<0 στο [0,2)

f'(x)<0 στο (2,+∞)

και αφού είναι συνεχής στο 2 , η f γνησίως φθίνουσα στο A_f

οπότε f(A)=($\lim_{\chi\to+\infty} f(x)$,$f(0)$]=(-∞,5] .

Οπότε έχει μέγιστο το $f(0)=5$ και δεν έχει ελάχιστο.

Γ3. i) $\lim_{\chi\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\chi\to2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{\chi\to2^-}\frac{-2x+4}{x-2}$= -2

$\lim_{\chi\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\chi\to2^+}\frac{-x^2+4\text{x}-3-1}{x-2}=\lim_{\chi\to2^+}\frac{-x^2+4\text{x}-4}{x-2}=\lim_{\chi\to2^+}(x-2)=0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=2, οπότε δεν ικανοποιεί το ΘΜΤ στο [0,3]

ii) $\lambda_{ΔΕ}=\frac{f(3)-f(0)}{3}=-\frac{5}{3}$, θα πρέπει να αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$ ώστε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}$

στο [0,2) η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $f'(x)=-2$

στο (2,3) η εξίσωση γίνεται:

$-2\xi+4=-\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi=-\frac{5}{3}-\frac{12}{3} \Leftrightarrow \xi=\frac{17}{6}$ η οποία είναι δεκτή αφού $2<\frac{17}{6}<3$

Γ4. $εφω=\frac{y}{x} \Leftrightarrow εφω(t)=\frac{y(t)}{2}$ (1)παραγωγίζω και έχω

$$\frac{1}{συν^2ω(t)}\,ω'(t)=\frac{1}{2}\,y'(t) \quad \text{για } t=t_0 \quad \frac{1}{συν^2ω(t_0)}\,ω'(t_0)=\frac{1}{2}\,y'(t_0)$$

$\Leftrightarrow ω'(t_0)=\frac{1}{5}$ rad/sec , Αφού $συνω(t_0)=\frac{2}{OM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (από Π.Θ.)

Και $y'(t_0)=\frac{1}{2}$ (από δεδομένα)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\left(\frac{\ln x-ax}{x}\right)'=\left(\frac{\ln x}{x}+a\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}+α$ όπως βλέπουμε στον πίνακα.

Επομένως $\frac{1}{e}+α=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow a=1$,

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ο.Μ.

Δ2. $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$, $x>0$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-\ln 4+\ln e=\ln\frac{e}{4}<0 \quad \text{αφού } \frac{e}{4}<1$$

$f(1)=1>0$

η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $f(\frac{1}{2}).f(1)<0$

Επομένως από Θ.Β υπάρχει $x_0 \epsilon (\frac{1}{2},1)$ ώστε f(x_0)=0 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Δ3. i)Η εξίσωση f(x)=f(4) έχει προφανείς ρίζες το 2 και το 4 αφού

$$f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{ln2}{2}+1=f(2),$$

και είναι μοναδικές αφού βρίσκονται στα διαστήματα που η f είναι γνησίως μονότονη.

ii)$2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \leq 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

γιατί όταν $x\epsilon[2,e]$:$x\geq 2 \Rightarrow f(x)\geq f(2)$, αφού η f γνησίως αύξουσα

όταν $x\epsilon[e,4]$: $x\leq 4 \Rightarrow f(x)\geq f(4)=f(2)$, αφού η f γνησίως φθίνουσα

ενώ αν $x \in (0,2) \cup (4,+\infty) \quad f(x) < f(2)$.

Δ4.

Θέτω $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u \quad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{1}{u}du$

Για $x = -\ln 2 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$

$x = 0 \Leftrightarrow u = 1$ **(1)**

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\, dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x)\frac{1-x}{e^x} \right| dx = \quad από\ (\mathbf{1})$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u)\frac{1-\ln u}{u} \right| \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u)\frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)f'(u)|du =$$

$$από\ (\mathbf{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u)f'(u)du + \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(x_0)\right) =$$

$$= \frac{f^2(1)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1+ln^2\frac{e}{4}}{2}\ \tau.\mu.$$

Αν $x \in [\frac{1}{2}, x_0]$,f γνησίως αυξουσά $\Leftrightarrow f(x) \leq 0$ **(2)**

Αν $x \in [x_0, 1]$, f γνησίως αυξουσά $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Βρύνας Σπύρος

Αλεξανδρόπουλος Βαγγέλης

Λιακόπουλος Σπύρος

Παναγιωτοπούλου Μάγδα

Υ.γ. Να επισημάνουμε ότι οι λύσεις είναι ενδεικτικές και όλα τα θέματα επιδέχονται και διαφορετικές επιλύσεις.