ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Σελ 186

Α2) Σελ. 76

Α3) Σελ 161

Α4) α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R.
με $f'(x) = (x^3 + ax^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$
Το $x_0 = 1$ εσωτερικό σημείο του A_f
η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

οπότε από θεώρημα Fermat $f'(1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

Β2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
Η f συνεχής στο R ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

- Το $0 \in f(\Delta_1)$ άρα η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_1 και $f \nearrow \Delta_1$ οπότε μοναδική στο Δ_1

και $0 \notin f((-\infty,0])$ τότε η ρίζα ανήκει στο $\Delta=(0,1]$ οπότε θετική

- Το $0 \in f(\Delta_2)$ άρα η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_2 και $f \searrow \Delta_2$ οπότε μοναδική στο Δ_2

- Το $0 \in f(\Delta_3)$ άρα η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_3 και $f \nearrow \Delta_3$ οπότε μοναδική στο Δ_3

Επομένως η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες στο $A_f=\mathbb{R}$.

B3) Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:
$f''(x)=(3x^2-12x+9)'=6x-12$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Η f κοίλη στο $(-\infty,2]$
Η f κυρτή στο $[2,+\infty)$

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(2,f(2)) \Rightarrow A(2,-1)$

B4) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi,f(\xi))$ είναι
$\boxed{y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)}$ (1)

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi,g(\xi))$ είναι
$y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y-\xi-f(\xi)=(1+f'(\xi))(x-\xi) \Leftrightarrow$

$$y - \cancel{\xi} - f(\xi) = x - \cancel{\xi} + f'(\xi)x - f'(\xi)\xi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = (1 + f'(\xi))x + f(\xi) - f'(\xi)\cdot\xi} \quad (2)$$

• Για $x=0$ η (1) γίνεται: $y - f(\xi) = f'(\xi)(-\xi)$

$$\boxed{y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)}$$

• Για $x=0$ η (2) γίνεται $\boxed{y = f(\xi) - \xi f'(\xi)}$

Άρα οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στον $y'y$ στο σημείο $\Lambda(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) • Για $x<0$ κοντά στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(e^x \eta\mu x) = e^0 \eta\mu 0 = 1\cdot 0 = 0$$

• Για $x>0$ κοντά στο 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$$

• $f(0) = 0$

Οπότε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

▸ Για $x<0$ κοντά στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x\,ημx}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(e^x \cdot \frac{ημx}{x}\right) = e^0\cdot 1 = 1$$

▸ Για $x>0$ κοντά στο 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0 \text{ και } \sqrt{x}>0} 1\cdot(+\infty) = +\infty$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2) ▸ Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πράξεις συνεχών

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών

Η f συνεχής στο $x_0=0$ από Γ1

Οπότε η f συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$ οπότε η C_f

δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

▸ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(e^x \cdot ημx)$

$|ημx| \le 1 \Leftrightarrow e^x|ημx| \le e^x \Leftrightarrow |e^x ημx| \le e^x$

$\Leftrightarrow -e^x \le e^x ημx \le e^x$

Γ3) $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$

θέτω $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$

Η φ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών
αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ από Γ2

$\varphi(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\varphi(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cancel{\eta\mu(-\pi)} + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2}$

άρα $\varphi(0)\varphi(-\pi) < 0$

οπότε από Θ. Bolzano η $\varphi(x) = 0$ έχει
μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$

Γ4) $y = f(x)$, $x \geq 0$
$y = \sqrt{x^2 + x}$, $x \geq 0$

Οι μεταβλητές x και y είναι συνάρτηση του
χρόνου t
οπότε
$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

παραγωγίζω και τα 2 μέλη ως προς t

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot \left(2x(t)x'(t) + x'(t)\right)$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ έχουμε
$x'(t_0) = y'(t_0)$ οπότε

$$x'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}}\left(2x(t_0)\,x'(t_0) + x'(t_0)\right)$$

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0)\left(2x(t_0)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \quad \overset{x'(t_0)>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$1 = \frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)} = 2x(t_0)+1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2(t_0)+x(t_0)\right) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Αδύνατη

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0

ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \cdot \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, e^{\ln^2 x} - \frac{2F(x)\, e^{\ln^2 x} \ln x}{x}}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2} \qquad xf(x) = 2F(x)\ln x$$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, e^{\ln^2 x} - \frac{\cancel{x} f(x)\, e^{\ln^2 x}}{\cancel{x}}}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, e^{\ln^2 x} - f(x)\, e^{\ln^2 x}}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2} \iff \boxed{g'(x) = 0}$$

άρα από συνέπεια Θ.Μ.Τ η g είναι σταθερή

Δ2) i) $\lim_{x \to 1} f(x) \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2F(x)\ln x}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} x f'(x) = f'(1) = 2$$

ΒΟΛΛΑΡΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$Δ_2$) ii) $x f(x) = 2F(x)\ln x$, $x>0$

Για $x \neq 1$: $F(x) = \dfrac{x f(x)}{2\ln x}$

η F παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και συνεχής

οπότε $F(1) = \lim\limits_{x\to 1} F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x f(x)}{2\ln x} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{2}\,\dfrac{f(x)}{\ln x}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1.$

Η $g(x)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

άρα $g(x) = c$, $x>0$

$\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$, $x>0$

$F(x) = c\cdot x^{\ln x}$, $x>0$

Για $x=1$: $F(1) = c\cdot 1^{\ln 1} \Leftrightarrow \boxed{1 = c}$

οπότε $F(x) = x^{\ln x}$, $x>0$

$Δ_3$) Η F συνεχής στο $(0, +\infty)$

$F'(x) = \left(x^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln^2 x}\right)' = e^{\ln^2 x}\cdot\left(\ln^2 x\right)'$

$F'(x) = e^{\ln^2 x}\, 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x\, e^{\ln^2 x}}{x}$, $x>0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

▸ $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $f \nearrow \Delta_1$ οπότε $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]$

• $f(1) = 1-6+9-3 = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 1]$

▸ $\Delta_2 = (1, 3)$ και $f \searrow \Delta_2$ οπότε $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to3^-} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)$

• $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-}(x^3-6x^2+9x-3) = 27-54+27-3 = -3$

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x^3-6x^2+9x-3) = 1$

Άρα $f(\Delta_2) = (-3, 1)$

▸ $\Delta_3 = [3, +\infty)$ και $f \nearrow \Delta_3$ οπότε $f(\Delta_3) = \left[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

• $f(3) = -3$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+9x-3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Άρα $f(\Delta_3) = [-3, +\infty)$

Όμως για $x \in (-\infty, 0]$ τότε $f((-\infty, 0]) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, -3]$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x \, e^{\ln^2 x}}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $e^{\ln^2 x}>0$ και

$\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1$

$\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x<\ln 1 \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} x<1$

οπότε

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

οπότε $F\downarrow (0,1]$ και $F\uparrow [1,+\infty)$

$F(x^2)=F(x)-(x-1)^2 \quad , \quad x\in(0,+\infty)$

$\boxed{\text{Για } x=1}$: $F(1)=F(1)-0 \Leftrightarrow F(1)=F(1)$ ισχύει

άρα $x=1$ προφανής λύση

$$\boxed{F(x^2)-F(x)=-(x-1)^2} \quad (1)$$

▸ Για $x\in(0,1)$ έχουμε

$x^2<x \overset{F\downarrow}{\Leftrightarrow} F(x^2)>F(x) \Leftrightarrow \boxed{F(x^2)-F(x)>0}$

και $(x-1)^2>0 \Leftrightarrow \boxed{-(x-1)^2<0}$

άρα η (1) είναι αδύνατη

▸ Για $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $x<x^2 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x)<F(x^2) \Leftrightarrow \boxed{F(x^2)-F(x)>0}$

και $\boxed{-(x-1)^2<0}$ άρα η (1) αδύνατη

Οπότε $x=1$ μοναδική λύση.

ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

• $\lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$ • $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

αρα απο κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x\to-\infty} e^x ημx = 0$

Οπότε η C_f εχει οριζοντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $-\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{x>0}{=}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+0} = 1 = λ$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \overset{x>0}{=}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$

αρα η C_f εχει πλαγια ασύμπτωτη την ευθεια $y = x + \frac{1}{2}$ στο $+\infty$

Δ4) Για $1 \le x \le e \overset{F \uparrow}{\Rightarrow} F(1) \le F(x) \le F(e)$

$\Leftrightarrow 1 \le F(x) \le 2$

άρα $E(\Omega) = \int_1^e |F(x)|\,dx = \int_1^e F(x)\,dx$

Είναι $\boxed{e^x \ge x+1}$ οπότε $e^{\ln^2 x} \ge \ln^2 x + 1$

$F(x) \ge \ln^2 x + 1$

$F(x) - \ln^2 x - 1 \ge 0$ μου η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ (όχι παντού μηδέν) στο $[1, e]$

οπότε $F(x) - \ln^2 x - 1 > 0$

άρα $\int_1^e (F(x) - \ln^2 x - 1)\,dx > 0$

$$\int_1^e F(x)\,dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx$$

Όμως $\int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx = \int_1^e \ln^2 x\,dx + \int_1^e dx$

$= \int_1^e (x)' \ln^2 x\,dx + [x]_1^e = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x\, 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx + e - 1$

$= e \ln^2 e - 1 \cancel{\ln^2 1} - 2\int_1^e \ln x\,dx + e - 1 =$

$= e - 2\int_1^e (x)' \ln x\,dx + e - 1 = 2e - 1 - 2[x \ln x]_1^e + 2\int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= 2e - 1 - 2(e\ln e - \cancel{\ln 1}) + 2[x]_1^e = 2e - 1 - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2$

$= 2e - 3$ Άρα $\int_1^e F(x)\,dx > 2e - 3$