

ΘΕΜΑ Α

A₁) Στοιχ. βιβλίο Σελ 93

A₂) Στοιχ βιβλίο Σελ 16

A₃) α) $\wedge$ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) $\wedge$

A₄) α. $(C)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B₁) $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V \Leftrightarrow V_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50$
 $\Leftrightarrow V_1 + 40 = 50 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 10}$

Με τους τύπους $f_i = \frac{V_i}{V}$, $f_i\% = 100 \cdot f_i$

και $N_i = V_1 + V_2 + \dots + V_i$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Αριθμός υποβλ X_i	Συχνότητα V_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Απόσπ. Συνολικά N_i	$X_i \cdot V_i$
0	10	20	20	0
1	15	30	50	15
2	11	22	72	22
3	8	16	88	24
4	6	12	100	24
Σύνολο	50	100	1111	85



ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$B_2) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i}{V} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B₃) Διατάσσω τις τιμές σε αύξουσα σειρά

Το ημίτονο είναι άρτιος αριθμός οπότε
η διαμέσος είναι το ημιάθροισμα των
μέσων παρατηρήσεων

$$\text{αρα } D = \frac{X_{25} + X_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

B₄) α) Το ποσοστό των υπολλήλων που
εργάζονται το πολύ 3 ώρες είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% =$$

$$20\% + 30\% + 22\% + 16\% =$$

$$88\%$$

β) Αν οι υπερωρίες αυξηθούν κατά
4 ώρες τότε οι νέες παρατηρήσεις
θα αποκρύψουν από τη δέσμη

$$y_i = x_i + 4$$

οπότε η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ είναι

$$\bar{y} = \bar{x} + 4$$

$$\bar{y} = 1,7 + 4$$

$$\bar{y} = 5,7$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad a = 620 \text{ α. μ.}$$

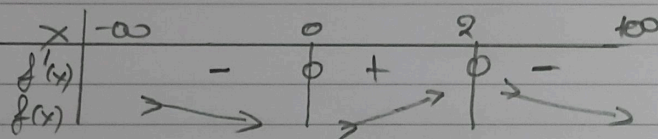
Γ₁) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + a)' = (-2x^3)' + (6x^2)' + (a)'$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2$$



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Γ₂) Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$
 με $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + a = \boxed{a}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$
 με $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + a = -16 + 24 + a = \boxed{8+a}$

Το ημίθροισμα των υψών των ακροσμάτων
 είναι -8 οπότε $\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow$

$$\frac{a + 8 + a}{2} = -8 \Leftrightarrow 2a + 8 = -16 \Leftrightarrow 2a = -24 \Leftrightarrow \boxed{a = -12}$$

Γ3) Για $a = -12$ τότε $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$
 $f'(x) = -6x^2 + 12x$

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 + 6 - 12 = -8$$

$$\lambda = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$$

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = \lambda x + \theta$
 με $\lambda = 6$ οπότε

$$y = 6x + \theta$$

αφού διέρχεται από το $M(1, f(1))$ τότε

$$-8 = 6 \cdot 1 + \theta$$

$$-8 = 6 + \theta$$

$$\boxed{\theta = -14}$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$\boxed{y = 6x - 14}$$

Γ4) $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$

$$-2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 8 - 4 \leq -4$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4$$

$$f(x) \leq -4$$

$$f(2) = 8 - 12 = -4$$

$$f \downarrow [2, +\infty) \quad f(x) \leq f(2)$$

$$x \geq 2$$

($\Rightarrow$)

$$x \in [2, +\infty)$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \quad \mu\epsilon \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda = \text{πραγματικός}$$

Δ1] Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\forall \epsilon$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (\lambda x^2)' + (7x)' + \left(\frac{2}{3} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \lambda \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7}$$

Ευλόγως $\mu\epsilon$ τον ορισμό της παραγώγου η παράγωγος της f στο $x_0 = 1$ είναι

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{οπότε } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

Δ2] Για $\lambda = -4$ τότε:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{f'(x) = x^2 - 8x + 7}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

f πρ. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$
 f πρ. φθίνουσα στο $[1, 7]$
 f πρ. αύξουσα στο $[7, +\infty)$



ΒΟΛΛΑΡΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$A_3] \quad 2020 < 2025 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(2020) < f(2025) \\ f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\text{αν} \quad \frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f'}{\Rightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \\ f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

σημειώ

$$A > 0$$

$$A_4] \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\begin{array}{l} \text{Horner division} \\ 1 \quad -10 \quad 16 \quad p=2 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -16 \\ \hline 1 \quad -8 \quad 0 \end{array} \right)$$
$$f'(x) = x^2 - 8x + 7$$
$$f''(x) = 2x - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 8x + 7) - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 10x + 16) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = 6$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = 2-8 \cdot \sqrt{2+1} + \sqrt{3} = -6\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$