

ΘΕΜΑ Α

A1) απόδειξη σελίδα 93 από σχολικό βιβλίο

A2) ορισμός σελίδα 16 από σχολικό βιβλίο

A3)

A) Λάθος

B) Σωστό

Γ) Σωστό

Δ) Σωστό

Ε) Λάθος

A4)

α. $(c)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1) Ισχύει πως

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 \Leftrightarrow v_1 = 10$$

Επίσης έχουμε πως $f_i = \frac{v_i}{v}$ με $i=1, \dots, 5$

$$f_1 \% = f_1 \cdot 100 = 20\%$$

$$f_2 \% = f_2 \cdot 100 = 30\%$$

$$f_3 \% = f_3 \cdot 100 = 22\%$$

$$f_4 \% = f_4 \cdot 100 = 16\%$$

$$f_5 \% = f_5 \cdot 100 = 12\%$$

$$N_1 = v_1 = 10$$

$$N_2 = v_2 + N_1 = 25$$

$$N_3 = v_3 + N_2 = 36$$

$$N_4 = v_4 + N_2 = 44$$

$$N_5 = v_5 + N_4 = 50$$

Πλήθος Ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

$$B2) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B3) έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων $n=50$ οπότε η διάμεσος δίνεται από τον τύπο $\delta = \frac{t_2^v + t_2^v + 1}{2} = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = 1,5$

B4) α) Το πολύ τρεις ώρες υπερωριών εργάζονται το

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\% \text{ ποσοστό των εργαζομένων.}$$

Β) Με αλλαγή μεταβλητής στις προηγούμενες παρατηρήσεις μας έχουμε:

$$y_i = x_i + 4, i=1,2,\dots, 50$$

$$\text{Άρα η μέση τιμή γίνεται } \bar{y} = \bar{x} + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = 5,7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					
		$Ελ.$	$Μεγ.$		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$

Γ2) Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ την τιμή $f(0)=a$

Και τοπικό μέγιστο στη θέση $x=2$ την τιμή $f(2)=a+8$

$$\text{Με δεδομένο ότι } \frac{f(0)+f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{a+8+a}{2} = -8 \Leftrightarrow 2a = -24 \Leftrightarrow a = -12$$

Επομένως , $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12, x \in \mathbb{R}$

Γ3) Η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1,f(1))=(1,-8)$ είναι $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$

$$\text{με } \lambda = f'(1) = 6$$

$$\text{έχουμε } \varepsilon: -8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$$

$$\text{άρα } \varepsilon: y = 6x - 14$$

Γ4) Για κάθε $x \in [2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε θα ισχύει

$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \leq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έχουμε $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7, x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 0 \quad (1)$$

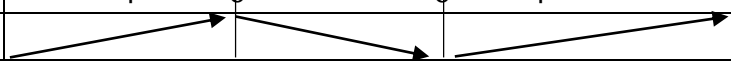
$$\text{Οπότε από (1) } 1+2\lambda+7=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=-4$$

Δ2) Η συνάρτηση είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Λύνουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$

Και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

Δ3) για τις τιμές 2020, 2025 οι οποίες ανήκουν στο $[7, +\infty)$ με $2020 < 2025$ και η f γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$ τότε $f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow 0 < f(2025) - f(2020)$

Αντίστοιχα για τις τιμές $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ οι οποίες ανήκουν στο $[1, 7]$ με $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$ τότε $f(\frac{3}{2}) > f(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow f(\frac{3}{2}) - f(\frac{5}{2}) > 0$

Επομένως ως πηλίκο θετικών όρων $A > 0$

$$\begin{aligned}
 \Delta 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Επιμέλεια απαντήσεων

Βρύνας Σπύρος

Παναγιωτοπούλου Μάγδα

Αλεξανδρόπουλος Βαγγέλης