ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2-6-2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 65

Α2. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 87

Α3. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 27

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 + 0 \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Β2. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$
Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Longrightarrow x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = -1$$

Μελετάμε το πρόσημο της $f'(x)$ το οποίο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$ τ.μέγ.	$\searrow$	$f(3)$ τ.ελαχ.	$\nearrow$	

- Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$.

- Για κάθε $x \in (-1,3)$ είναι $f'(x) < 0$, συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$.
- Στη θέση $x = -1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή:

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

- Στη θέση $x = 3$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή:

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

Β3. Το $f'(1) = -3$ και το $f(0) = 1$ $άρα$ $M(0, f(0)) = (0, 1)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$ είναι:

(ε): $y = f'(0)x + \beta \Longrightarrow y = -3x + \beta$.

Το $M(0, f(0)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(0) = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow 1 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα (ε): $y = -3x + 1$

Β4. Είναι:

$$\lim_{x\to -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-3) = -1 - 3 = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το δείγμα των παρατηρήσεων αποτελείται από $\nu = 7$ μαθητές

Μας δίνεται ότι $\bar{x}$=4 Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{\nu} \Longrightarrow 4 = \frac{4 + 5 + 4 + \kappa + 0 + 3 + 7}{7}$$

$$\Longrightarrow 4 = \frac{23 + \kappa}{7} \Longrightarrow 28 = 23 + \kappa \Longrightarrow \kappa = 5$$

Γ2. Για κ=5 οι 7 παρατηρήσεις του δείγματος είναι: 4,5,4,5,0,3,7. Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι περιττό ($\nu = 7$), η διάμεσος δ ισούται με τη μεσαία (4^{η}) παρατήρηση.

Συνεπώς: $\delta = 4$ βιβλία.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$. Η διακύμανση s^2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$$

Είναι:

$$\sum_{i=1}^{7}(t_i - \bar{x})^2 = (0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2$$
$$= (-4)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$$
$$= 16 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 9 = 28$$

Συνεπώς, η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4. Είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

Ο συντελεστής μεταβολής ορίζεται ως:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \quad \text{ή} \quad CV\% = 50\%$$

Ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής του δεν ξεπερνά το 10% ($CV \leq 0{,}10$). Επειδή $50\% > 10\%$, το εξεταζόμενο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω x η μία πλευρά του ορθογωνίου οικοπέδου και y η άλλη πλευρά του σε μέτρα (m). Μας δίνεται ότι το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $E = 100\ m^2$. Ισχύει:

$$x \cdot y = 100 \Longrightarrow y = \frac{100}{x} \quad (\text{με } x > 0)$$

Η περίμετρος Π ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου δίνεται από τον τύπο:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Αντικαθιστώντας το y ως προς x, προκύπτει η ζητούμενη συνάρτηση περιμέτρου:

$$\Pi(x) = 2x + 2\left(\frac{100}{x}\right) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Δ2. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ για $x \in (0, +\infty)$:

$$\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2}$$

Είναι: $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{200}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 200$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100 \overset{x>0}{\rightarrow} x = 10\ m$$

Το πρόσημο της $\Pi'(x)$ στο πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	0		10		$+\infty$
$\Pi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$		$\searrow$	$\Pi(10)$ $ολ. ελαχ.$	$\nearrow$	

- Για κάθε $x \in (0,10)$ ισχύει $\Pi'(x) < 0$ (αφού $x^2 < 100 \Longrightarrow \frac{200}{x^2} > 2$), άρα η $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$.

- Για κάθε $x \in (10, +\infty)$ ισχύει $\Pi'(x) > 0$ (αφού $x^2 > 100 \Longrightarrow \frac{200}{x^2} < 2$), άρα η $\Pi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10, +\infty)$.

Συνεπώς, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 10\ m$.

Για $x = 10$, υπολογίζουμε τη διάσταση της άλλης πλευράς y:

$$y = \frac{100}{10} = 10\ m$$

Επειδή $x = y = 10\ m$, οι δύο πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα το ορθογώνιο οικόπεδο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Δ3. Δίνεται ότι $x_1, x_2 \in (0,10)$ με $x_1 < x_2$. Από τη μελέτη μονοτονίας στο ερώτημα Δ2, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$. Συνεπώς:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$$

Εξετάζουμε τα πρόσημα του αριθμητή και παρονομαστή της παράστασης A:

- Ο αριθμητής είναι θετικός: $\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$.

- Ο παρονομαστής είναι αρνητικός, αφού $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 < 0$.

Άρα:

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

Δ4. Είναι

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της $\Pi'(x)=2-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2-200}{x^2}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\frac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2\cdot\left[(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2\cdot(10x-100)}=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2\cdot(x-10)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2}=\frac{2(10+10)(\sqrt{10\cdot 10}+10)}{10\cdot 10^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 20\cdot(10+10)}{10\cdot 100}=\frac{40\cdot 20}{1000}=\frac{800}{1000}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

Τις λύσεις επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί του φροντιστηρίου Mathisis

Διονύσιος Ζαχιώτης

Δημήτριος Χρυσανθόπουλος