



**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 3-6-2026**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 133
A2. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 51
A3. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 185
A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f(x) = 2 \ln(x - 1)$ με $A_f = (1, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ με $A_g = [2, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h = f \circ g$ είναι:

$$A_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in A_f\} = \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x - 2} + 1 \in (1, +\infty)\}$$

Έχουμε: $\sqrt{x - 2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Συναληθεύοντας με το $x \in [2, +\infty)$, προκύπτει $A_h = (2, +\infty)$.

Ο τύπος της συνάρτησης $h(x)$ είναι:

$$h(x) = f(g(x)) = 2 \ln((\sqrt{x - 2} + 1) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x - 2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x - 2) = \ln(x - 2)$$

B2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $A_h = (2, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x-2}$.

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$ επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, άρα είναι "1-1" και συνεπώς αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης, θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x για $x > 2$:

$$y = \ln(x - 2) \Leftrightarrow e^y = x - 2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Πρέπει $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow e^y + 2 > 2 \Rightarrow e^y > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται ως $h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (2, +\infty)$ με τύπο:

$$h^{-1}(x) = e^x + 2$$

B3. Για το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ εξετάζουμε ξεχωριστά τα όρια των δύο όρων του γινομένου. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$$

Για το κλάσμα $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{2\ln(x-1)}{x-2}$, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα De L'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

Συνδυάζοντας τα δύο επιμέρους όρια, προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.i) Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

- Αν $\kappa > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty$ Άτοπο
- Αν $\kappa < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty$ Άτοπο

Επομένως $\kappa = 0$

ii) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

Αν $\mu = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Άρα $\mu \neq 0$.

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων $(0,0)$, που σημαίνει ότι $f'(0) = 1$.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - (\mu x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu - \mu(0)^2}{(0^2+1)^2} = 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Γ2. Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$, η συνάρτηση είναι $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ με $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$.

Για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

Για $x \in (-1, 1)$ ισχύει $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο στη θέση $x = -1$ το

$f(-1) = -\frac{1}{2}$, και τοπικό μέγιστο στη

θέση $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↙ $f(-1)$ τ.ελαχ.		↘ $f(1)$ τ.μέγ.	↙	

ii) Στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right).$$

Στο $\Delta_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$$f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right].$$

Άρα $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, παρατηρούμε ότι $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$, τιμή που βρίσκεται εκτός του συνόλου τιμών της f , οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη για $\alpha \neq 0$
- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $f(x) = \frac{1}{2}$. Η τιμή αυτή αποτελεί το ολικό μέγιστο της συνάρτησης. Επομένως, η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$.

Γ3. Δίνεται $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$.

i) Προσθέτουμε τα δύο ολοκληρώματα:

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx$$

Άρα $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$

ii) Υπολογίζουμε το I_0 για $\nu = 0$:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση του ερωτήματος (i) βρίσκουμε τα I_1 και I_2 :

- Για $\nu = 0 \Rightarrow I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$
- Για $\nu = 1 \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ την βοηθητική συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ για την οποία ισχύουν:

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(-1) \cdot h(0) < 0$

αφού: $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ επειδή από την υπόθεση ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $g(-1) < 1 \Rightarrow h(-1) < 0$ και $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$ από την ίδια υπόθεση.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Για τη μοναδικότητα:

Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 0)$ με $1 < \rho_1 < \rho_2 < 0$

Στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν για την h οι προϋποθέσεις του θεώρηματος Rolle αφού η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} οπότε:

- η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2)
- $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1 \text{ που είναι Άτοπο από την υπόθεση.}$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0 \cdot g(0) = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa =$$

$$= 2(1) + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon \varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma \nu \nu x} = 1 \right)$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τα δύο πλευρικά όρια πρέπει να είναι ίσα:

$$3 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 3$$

Δ3. i) Για $\kappa = 3$, ο κλάδος της συνάρτησης για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ είναι ο

$$f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ με παράγωγο:

$$f'(x) = 2\sigma\nu\nu x + \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\nu\nu^3 x - 3\sigma\nu\nu^2 x + 1}{\sigma\nu\nu^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sigma\nu\nu^3 x - 2\sigma\nu\nu^2 x - \sigma\nu\nu^2 x + 1}{\sigma\nu\nu^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sigma\nu\nu^2 x(\sigma\nu\nu x - 1) - (\sigma\nu\nu x - 1)(\sigma\nu\nu x + 1)}{\sigma\nu\nu^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sigma\nu\nu x - 1)(2\sigma\nu\nu^2 x - \sigma\nu\nu x - 1)}{\sigma\nu\nu^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sigma\nu\nu x - 1)^2(2\sigma\nu\nu x + 1)}{\sigma\nu\nu^2 x} > 0$$

αφού στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$, $\sigma\nu\nu^2 x > 0$, $(\sigma\nu\nu x - 1)^2 > 0$ και $2\sigma\nu\nu x + 1 > 0$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ οπότε:

$$\text{για κάθε } x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

ii) Η εξίσωση $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = [0, \frac{\pi}{2})$, με: $f(0) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} \left(\frac{1}{\sigma\nu\nu x} \cdot \eta\mu x \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της είναι το } f(\Delta) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Επειδή η σταθερά $\frac{\pi}{3} \in (0, +\infty)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε

$$f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ και είναι μοναδικό αφού η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, \frac{\pi}{2}).$$

Δ4. i) Για $x \in [x_1, 0]$, έχουμε $f(x) = x^2(g(x) + x)$. Γνωρίζουμε ότι $x^2 \geq 0$. Η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ έχει μοναδική ρίζα το x_1 .

Η h' είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$ με $h'(x) \neq 0$ στο $(x_1, 0)$

άρα διατηρεί πρόσημο, άρα η h γνησίως μονότονη στο $[x_1, 0]$

Έστω ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, 0]$, τότε $h(x_1) > h(0) \Rightarrow h(0) < 0$

Άτοπο από υπόθεση. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$

Επομένως για $x \geq x_1 \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$ και $x^2 \geq 0$

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$

ii) Το συνολικό εμβαδόν του χωρίου Ω χωρίζεται από τον άξονα $y'y$ σε δύο ισοεμβαδικά μέρη, δηλαδή $E_1 = E_2$.

Αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ το εμβαδόν E_1 (από x_1 έως 0) ισούται με:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^0 (x^2g(x) + x^3)dx = \int_{x_1}^0 x^2g(x)dx + \int_{x_1}^0 x^3dx = \\ &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot g'(x)dx + 0 - \frac{x_1^4}{4} = \\ &= -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4}. \end{aligned}$$

Επειδή $g(x_1) = -x_1$,

$$E_1 = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot g'(x)dx$$

Αφού από ερ.Δ2 $f(x) \geq 0$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ το εμβαδόν E_2 (από 0 έως $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$) ισούται με:

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x dx = [-2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} + [-\ln|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2\frac{1}{2} + 2 - \ln\frac{1}{2} + 0 - 3\frac{\frac{\pi^2}{9}}{2} = -1 + 2 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Εξισώνουμε τα δύο εμβαδά $E_1 = E_2$ λόγω της συμμετρίας:

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow -\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot g'(x)dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \stackrel{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = -3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

Τις λύσεις επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί του φροντιστηρίου **Mathisis**

Διονύσιος Ζαχιώτης
Δημήτριος Χρυσανθόπουλος

Mathisis